

PHYSIK

Gekoppelte Bewegungen

auf horizontaler Ebene
und auf schiefer Ebene

Datei Nr. 91131

Stand: 20. September 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Grundlagen	3
	Newton'sches Kraftgesetz, Reibungskräfte, Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	
2	Antrieb über eine Umlenkrolle auf horizontaler Ebene	4
3	Grundlage: Die schiefe Ebene	10
4	Antrieb über eine Umlenkrolle auf schiefer Ebene	11
5	Übersicht	18
6	Aufgaben mit Kurzlösungen	19

1 Grundlagen

(1) Das **Newtonsche Kraftgesetz**

beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kraft, die auf eine Masse wirkt und die daraus resultierende Beschleunigung (die auch als Bremsverzögerung wirken kann, wenn sie der Bewegungsrichtung entgegen wirkt).

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m}$$

- (2) Wenn Reibung im Spiel ist, wirkt die **Reibungskraft** stets bremsend.
Man berechnet sie durch die Formel

$$F_R = f \cdot N$$

wobei N die Normalkraft ist. Darunter versteht man die Kraft, die den Körper senkrecht gegen die Unterlage drückt. Bewegt sich der Körper auf horizontaler Unterlage, dann ist die Normalkraft natürlich die Gewichtskraft

$$G = mg$$

Auf einer horizontalen Ebene wird somit die Reibungskraft durch so berechnet:

$$F_R = f \cdot G = f \cdot m \cdot g$$

- (3) Ist der Körper in Ruhe, dann wirkt zunächst die Haftreibungskraft. Ist er in Bewegung, dann die Gleitreibungskraft, oder die Rollreibungskraft.
Der Reibungskoeffizient f ist bei der Rollreibung am kleinsten und am größten bei der Haftreibung.
- (4) Für die gleichmäßig beschleunigte horizontale Bewegung gelten diese Gleichungen

$$v(t) = v(0) \pm a \cdot t$$

$$s(t) = v(0) \cdot t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

Das Minuszeichen gilt bei einer verzögerten Bewegung.

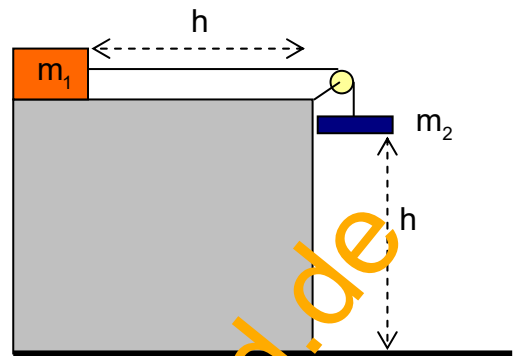
- (5) Wenn nichts anderes gesagt, rechnen wir mit $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2 Antrieb über eine Umlenkrolle auf horizontaler Ebene

Beispiel 1

Ein auf einer waagerechten Ebene liegender Körper der Masse $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ wird über ein masseloses Seil an einen nach unten ziehenden Körper der Masse $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ angekoppelt. Wir gehen davon aus, dass sich die gesamte Anordnung in Bewegung setzt.

Auf der horizontalen Fläche herrscht Reibung mit der Gleitreibungszahl $f = 0,2$. Luftwiderstand wird ignoriert.



- Berechne die Beschleunigung der Anordnung
- Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 unten auf, wenn $h = 1 \text{ m}$ ist.
- Welche Kraft muss das Seil übertragen (also aushalten)?

Lösung:

- Berechne die Beschleunigung der Anordnung.

Die Gewichtskraft G_2 der Masse m_2 beschleunigt die gekoppelten Körper m_1/m_2 , die Gleitreibungskraft R_1 von m_1 bremst das System.

Die Antriebskraft ist demnach $F = G_2 - R_1 = m_2 g - f m_1 g$ und erzeugt nach Newton diese

Beschleunigung:
$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 g - f m_1 g}{m_1 + m_2} = \dots = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Achtung: F wirkt auf die Gesamtmasse $m_1 + m_2$ (im Nenner beachten!)

- Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 unten auf, wenn $h = 1 \text{ m}$ ist.

Das System führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung durch.

Also gelten diese Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = a \cdot t \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 \quad (2)$$

Aus (2) folgt die Fahrzeit:
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2m}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{1 \text{ s}^2} = 1 \text{ s}$$

Dann hat es diese Endgeschwindigkeit erreicht:
$$v(1 \text{ s}) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Welche Kraft muss das Seil übertragen (also aushalten)?

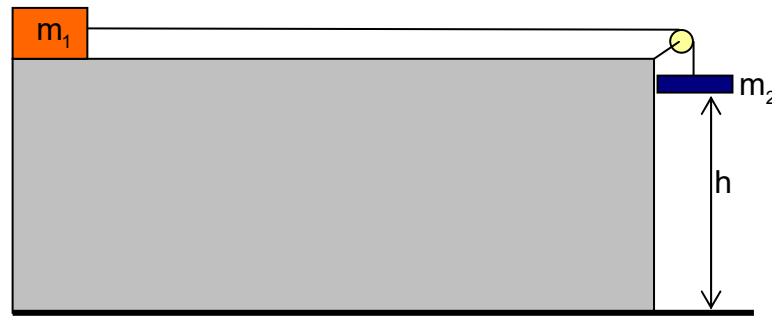
Die Zugkraft G_2 beschleunigt einerseits m_2 mit der Kraft $F_2 = m_2 \cdot a$ und m_1 mit $F_1 = m_1 \cdot a$.

Andererseits überwindet sie die Reibung vom m_1 . Das Seil muss also die Differenz

$$F_s = G_2 - F_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) = 0,1 \text{ kg} \cdot (10 - 2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,8 \text{ N} \text{ übertragen.}$$

$$\text{Oder die Summe } F_s = m_1 \cdot a + f \cdot m_1 g = m_1 (a + f \cdot g) = 0,2 \text{ kg} \cdot (2 + 0,2 \cdot 10) = 0,8 \text{ N.}$$

Beispiel 2



Ein auf einer waagerechten Ebene liegender Körper wird mit einem masselosen Seil mit einem nach unten ziehenden Körper m_2 verbunden. Es sei $m_1 = 1 \text{ kg}$ und $m_2 = 0,5 \text{ kg}$.

- Wie groß darf der Haftreibungskoeffizient f' höchstens sein, damit sich die Anordnung in Bewegung setzt?
- Nun sei $f = 0,4$. Berechne die Geschwindigkeit, mit der m_2 in $h = 3 \text{ m}$ Tiefe aufsetzt.
- Welche Geschwindigkeit haben die Körper, wenn m_2 in halber Höhe ist? Wie weit sind sie in der halben Fahrzeit gekommen?
- Nach $t = 1,5 \text{ s}$ wird die Schnur durch einen geeigneten Mechanismus abgetrennt. Wie weit könnte dann m_1 noch gleiten, vorausgesetzt die Fahrbahnlänge reicht aus? Mit welcher Geschwindigkeit schlägt m_2 unten auf?
- Wie groß ist die Seilkraft, solange die Körper noch gekoppelt fahren?

Lösung:

- Die Haftreibung wird dann überwunden, wenn die Antriebskraft, also die Gewichtskraft G_2 von m_2 , mindestens so groß ist wie die Haftreibungskraft:

$$G_2 > R_1' \Leftrightarrow m_2 g > f' \cdot m_1 \cdot g$$

$$f' < \frac{m_2}{m_1} = \frac{0,5 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} = \frac{1}{2}$$

- Nun sei $f = 0,4$. Berechne die Geschwindigkeit, mit der m_2 in $h = 3 \text{ m}$ Tiefe aufsetzt.

Die beschleunigende Kraft $F = G_2 - R_1 = m_2 g - f \cdot m_1 g$ bewirkt auf die Gesamtmasse

$$m_1 + m_2 \text{ diese Beschleunigung: } a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 g - f \cdot m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \text{ kg} - 0,4 \cdot 1 \text{ kg}}{1,5 \text{ kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Da die Anordnung aus der Ruhe heraus startet, gelten diese Bewegungsgleichungen:

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{und} \quad v = \sqrt{2as}$$

(Die dritte Formel entsteht aus den ersten beiden durch Elimination von t .)

$$v = \sqrt{2 \cdot 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- c) Welche Geschwindigkeit haben die Körper, wenn m_2 in halber Höhe ist?
Wie weit sind sie in der halben Fahrzeit gekommen?

Die halbe Höhe bedeutet $s = 1,5 \text{ m}$. Dort ist $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \text{ m}} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Fahrzeit erhält man aus $v = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 2,1 \text{ s}$

Zurückgelegter Weg in der halben Fahrzeit: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,1^2 \text{ s}^2 \approx 1,5 \text{ m}$

- d) Nach $t = 1,5 \text{ s}$ wird die Schnur durch einen geeigneten Mechanismus abgetrennt.
Wie weit könnte dann m_1 noch gleiten, vorausgesetzt die Fahrbahnlänge reicht aus?

Nach $1,5 \text{ s}$ haben die Körper diese Geschwindigkeit erreicht: $v_1 = a \cdot t_1 = 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \text{ s} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dann führt m_1 eine gleichmäßig gebremste Bewegung aus. Die Reibungskraft erzeugt diese

$$\text{Bremsverzögerung: } a = \frac{R_1}{m_1} = \frac{f \cdot m_1 \cdot g}{m_1} = f \cdot g = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Bewegungsgleichungen für eine gleichmäßig gebremste Bewegung:

$$v(t) = v_1 - a \cdot t \Leftrightarrow v(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \quad (1)$$

$$s(t) = v_1 \cdot t - \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow s(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \quad (2)$$

Bedingung für den Haltepunkt: $v(t) = 0$, T sei die Bremszeit.

Aus (1) folgt dann: $0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot T \Rightarrow 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot T = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow T = \frac{1}{4} \text{ s} = 0,25 \text{ s}$

Aus (2) folgt dann der Bremsweg:

$$s\left(\frac{1}{4} \text{ s}\right) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{4} \text{ s} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{4} \text{ s}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \text{ m} = \frac{1}{8} \text{ m} = 0,125 \text{ m}$$

Anmerkung: Eine Bremsbewegung bis zum Halten ist die umgekehrte Bewegung zu einer Beschleunigung aus der Ruhe heraus (Film rückwärts laufen lassen.)

Dafür berechnet man den Weg schneller so:

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}^2}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{1}{8} \text{ m} = 0,125 \text{ m}$$

- Mit welcher Geschwindigkeit schlägt m_2 unten auf?

m_2 hat die Geschwindigkeit $v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und fällt ab da frei (senkrechter Wurf nach unten).

Bewegungsgleichungen: $v(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \quad (3)$

und $s(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \quad (4)$

Der Körper m_2 hat bis zur Abkopplung bereits $0,75 \text{ m}$ zurückgelegt.

Die Gesamthöhe beträgt 3 m , also hat er noch die Fallstrecke $s = 2,25 \text{ m}$

zurück zu legen. Setzt man dies in (4) ein, folgt eine quadratische Gleichung:

$$2,25 \text{ m} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

Wir formen die Gleichung um und dividieren durch $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, was einer Multiplikation

mit $\frac{\text{s}^2}{\text{m}}$ entspricht: $2,25 \text{ s}^2 = 1 \text{ s} \cdot t + 5 \cdot t^2$ bzw. $5t^2 + 1 \text{ s} \cdot t - 2,25 \text{ s}^2 = 0$

Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \text{ s} \pm \sqrt{1 \text{ s}^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2,25 \text{ s}^2)}}{10} = \frac{-1 \text{ s} \pm \sqrt{1 \text{ s}^2 + 20 \cdot 2,25 \text{ s}^2}}{10} = \frac{-1 \text{ s} \pm \sqrt{46 \text{ s}^2}}{10} \approx \begin{cases} 0,58 \text{ s} \\ (-2,0) \end{cases}$$

Damit können wir aus (3) die Geschwindigkeit berechnen:

$$v(0,58 \text{ s}) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,58 = 6,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e) Wie groß ist die Seilkraft, solange die Körper noch gekoppelt fahren?

Die Gewichtskraft G_2 hat drei Wirkungen: Sie beschleunigt m_1 und m_2 und überwindet die Reibungskraft:

$$G_2 = m_1 a + \underbrace{f \cdot m_1 g}_{\substack{\text{wirkt auf } m_1 \\ = \text{Seilkraft}}} + m_2 a$$

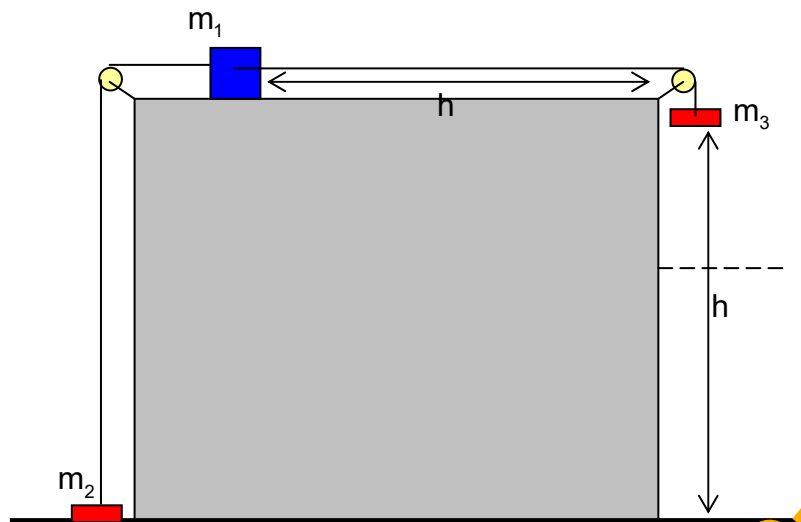
Die Seilkraft ist also der auf m_1 entfallene Anteil der Antriebskraft G_2 :

Also rechnet man entweder:

$$F_S = G_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) = 0,5 \text{ kg} \cdot (10 - 0,67) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,67 \text{ N}$$

Oder $F_S = m_1 a + F_R = m_1 a + f \cdot m_1 g = m_1 (a + f \cdot g) = 1 \text{ kg} \cdot (0,67 + 0,4 \cdot 10) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,67 \text{ N}$

Beispiel 3



- a) Unter welcher Bedingung für die Massen m_1 , m_2 und m_3 setzt sich die Anordnung trotz Haftreibung von selbst in Bewegung? Was folgt daraus für den Haftreibungskoeffizienten f' ? Setzt sich die Anordnung in Bewegung, wenn $f' = 0,4$ ist und $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3m_2$ ist?
- b) Es sei $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3m_2$ und die Anordnung setze sich durch eine geeignete Maßnahme in Bewegung. Mit welcher Beschleunigung geschieht dies, wenn der Gleitreibungskoeffizient $f = 0,2$ ist? Welche maximale Geschwindigkeit kann die Anordnung erzielen, wenn $h = 3\text{ m}$ ist?
- c) Nun wird rechts eine Platte so angebracht, so dass m_2 nach $0,75\text{ m}$ aufsetzt. Wie weit kann dann m_1 noch gleiten? (Der Haken zwischen m_1 und m_3 soll nicht behindern)
- d) Nach dem Halten setzt sich die Anordnung in umgekehrter Richtung in Bewegung. Berechne die Beschleunigung und die Geschwindigkeit von m_1 , wenn m_3 wieder (durch einen Ruck) angehoben wird.

Lösung:

- a) Das System setzt sich in Bewegung, wenn die Gewichtskraft G_3 größer ist als die Summe aus der Gewichtskraft G_2 und der Haftreibungskraft R_1' .

Das bedeutet: $G_3 > G_2 + R_1'$

d.h. $m_3 g > m_2 g + m_1 g \cdot f'$

also $m_3 > m_2 + m_1 \cdot f'$,

ergibt $f' < \frac{m_3 - m_2}{m_1}$.

Für $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3m_2$ folgt: $f' < \frac{2m_2 - m_2}{3m_2} = \frac{1}{3}$.

Da $f' = 0,4 > \frac{1}{3}$ ist, setzt sich die Anordnung in diesem Fall nicht von selbst in Bewegung.

- b) Es sei $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3m_2$ und die Anordnung setze sich durch eine geeignete Maßnahme in Bewegung. Mit welcher Beschleunigung geschieht dies, wenn der Gleitreibungskoeffizient $f = 0,2$ ist?
Welche maximale Geschwindigkeit kann die Anordnung erzielen, wenn $h = 3\text{ m}$ ist?

Berechnung der Beschleunigung.

Die beschleunigende Kraft ist $F = G_3 - G_2 - R_1 = m_3g - m_2g - f \cdot m_1g$:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3g - m_2g - f \cdot m_1g}{m_1 + m_2 + m_3} = \dots = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für eine Bewegung aus der Ruhe heraus gilt: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- c) Nun wird rechts eine Platte so angebracht, so dass m_2 nach $0,75\text{ m}$ aufsetzt.
Wie weit kann dann m_1 noch gleiten? (Der Faden zwischen m_1 und m_2 soll nicht behindern)

Nach der Strecke $s = 0,75\text{ m}$ haben die drei Massen die Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{3}{4}\text{m}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dann setzt eine Bremsbewegung ein. Bremskräfte sind sowohl die Gewichtskraft G_2 , wie auch die Gleitreibungskraft R_1 .

Berechnung der Bremsverzögerung für m_2 und m_1 :

$$a = \frac{G_2 + R_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2g + f \cdot m_1g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 + 0,2 \cdot 3m_2}{3m_2 + m_2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{6m_2}{4m_2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Berechnung des Bremsweges für m_1 (oder m_2):

Wir betrachten die umgekehrte Bewegung aus dem Haltepunkt heraus rückwärts.

$$\text{Dafür gilt: } v_2 = \sqrt{2a_2s_2} \Rightarrow s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2} = \frac{1}{8}\text{m} = 0,125\text{ m}$$

- d) Nach dem Halten setzt sich die Anordnung in umgekehrter Richtung in Bewegung.
Berechne die Beschleunigung und die Geschwindigkeit von m_1 , wenn m_3 wieder (durch einen Ruck) angehoben wird

Neue Beschleunigung.

$$a = \frac{G_2 - R_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2g - f \cdot 3m_2 \cdot g}{3m_2 + m_2} = \frac{m_2 - 0,2 \cdot 3m_2}{3m_2 + m_2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{0,4}{4} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

m_1 gleitet die Strecke $0,125\text{ m}$ zurück, dann ist die Schnur gespannt und m_3 wird wieder angehoben.

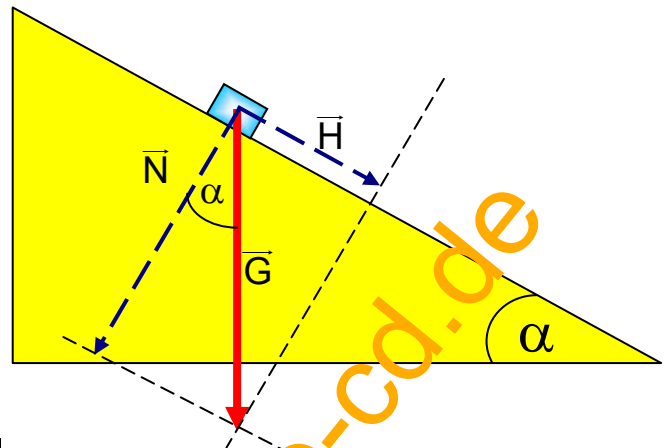
Nach $s_3 = 0,125\text{ m}$ hat die (aus m_1 und m_2 bestehende) Anordnung die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2as_3} = \sqrt{2 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,125\text{ m}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3 Grundlagen: Die schiefe Ebene

Übersicht:

Nehmen wir an, ein Körper liegt auf einer schiefen Ebene und beginnt, hinab zu gleiten. Dann wirkt die **Hangabtriebskraft** antreibend, die **Gleitreibungskraft** bremst. Diese wird durch die **Normalkraft** erzeugt, die den Körper senkrecht gegen die Oberfläche drückt.



Hangabtriebskraft:

$$\sin \alpha = \frac{H}{G} \Rightarrow H = G \cdot \sin \alpha$$

Normalkraft:

$$\cos \alpha = \frac{N}{G} \Rightarrow N = G \cdot \cos \alpha$$

Gleitreibungskraft:

$$R = f \cdot N = f \cdot G \cdot \cos \alpha = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{H - R}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{m} = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

Wenn die Bewegung reibungslos verlaufen soll, setze man einfach $f = 0$, das ergibt dann

$$a = g \cdot \sin \alpha.$$

Beispiel:

Eine schiefe Ebene hat eine Neigung von 40° . Der Gleitreibungskoeffizient beträgt $f = 0,3$.

Dann wirkt die Beschleunigung: $a = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \approx 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Eine Strecke von $s = 60 \text{ cm}$ wird dann in der Zeit $t = 0,54 \text{ s}$ zurückgelegt:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{1,2 \text{ m}}{4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,54 \text{ s}$$

Die erreichte Geschwindigkeit ist dann $v = a \cdot t = 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,54 \text{ s} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

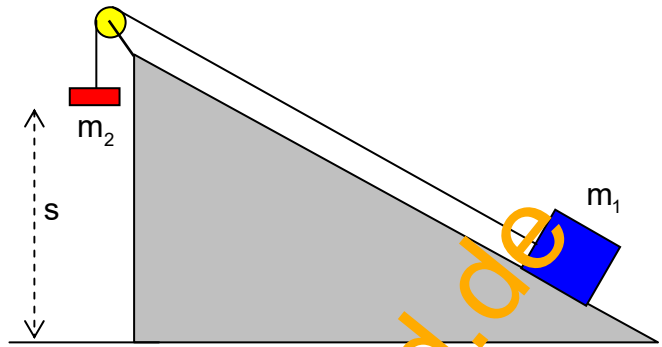
4 Antrieb über eine Umlenkrolle auf schiefer Ebene

Beispiel 4

m_1 und m_2 seien durch eine nahezu masseloses Seil und eine Rolle miteinander verbunden.

Die schiefe Ebene habe einen Neigungswinkel von $\alpha = 30^\circ$.

Der Gleitreibungskoeffizient sei $f = 0,2$.



- Welches Vielfache von m_1 muss m_2 sein, damit die Bewegung so abläuft, dass m_1 die Ebene hinaufgezogen wird.
- Es sei nun $m_2 = m_1$. Berechne dazu die Beschleunigung a_1 . Nach welcher Zeit hat die Anordnung die Strecke $s_1 = 0,5 \text{ m}$ zurückgelegt?
- Der Körper mit der Masse m_2 setzt nach diesen $0,5 \text{ m}$ auf dem Boden auf. Ab diesem Moment gleitet m_1 alleine und gebremst den Hang hinauf. Wie weit kommt er dann noch? (Die Schnur denken wir uns dann nicht vorhanden)
- Anschließend gleitet er wieder den Hang hinab so lange, bis die Schnur wieder gespannt ist. Dann gibt es einen Ruck und m_1 wird angehoben. Mit welcher Geschwindigkeit erreicht m_2 den Punkt, an dem m_2 wieder in Bewegung kommt?
- Zeichne ein v-t-Diagramm für diesen Bewegungsablauf.

Lösung:

- Welches Vielfache von m_1 muss m_2 sein, damit die Bewegung so abläuft, dass m_1 die Ebene hinaufgezogen wird.

Diese Kräfte wirken: Die Gewichtskraft G_2 von m_2 zieht,
 Die Hangabtriebskraft H_1 von m_1 bremst,
 Die Gleitreibungskraft R_1 von m_1 bremst.

Eine Aufwärtsbewegung von m_1 kommt dann zustande, wenn gilt:

$$G_2 > H_1 + R_1$$

$$\begin{aligned} \text{d. h.} \quad m_2 &> m_1 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ m_2 &> 0,5 m_1 + 0,17 m_1 = 0,67 m_1 \end{aligned}$$

Ergebnis: Wenn $m_2 > 0,67 m_1$ ist, dann bewegt sich die Anordnung nach links.

(Voraussetzung ist, dass die stärkere Haftreibung zu Beginn durch einen Anstoß überwunden wird.)

- Es sei nun $m_2 = m_1$. Berechne dazu die Beschleunigung a_1 .
 Nach welcher Zeit hat die Anordnung die Strecke $s_1 = 0,5 \text{ m}$ zurückgelegt?

Die beschleunigende Kraft ist $F = G_2 - H_1 - R_1 = m_2 g - m_1 g \cdot \sin \alpha - f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha$

und erzeugt diese Beschleunigung: (ich schreibe m statt m_1 und m_2 , denn $m = m_1 = m_2$):

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{mg - mg \cdot \sin \alpha - f \cdot mg \cdot \cos \alpha}{2m} = \frac{g(1 - \sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{2}$$

Mit Zahlen erhält man $a = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Strecke $s_1 = 0,5 \text{ m}$ wird in der Zeit t_1 zurückgelegt:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{1}{1,6}} \text{ s} = 0,79 \text{ s}$$

Dann haben die beiden Massen die Geschwindigkeit $v_1 = a_1 \cdot t_1 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,79 \text{ s} \approx 1,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c)

Der Körper mit der Masse m_2 setzt nach diesen $0,5 \text{ m}$ auf dem Boden auf. Ab diesem Moment gleitet m_1 alleine und gebremst den Hang hinauf. Wie weit kommt er dann noch? (Die Schnur denken wir uns dann nicht vorhanden)

Nachdem m_1 unten aufgesetzt hat, vollzieht m_2 eine gleichmäßig verzögerte Bewegung.

Es bremst die Hangabtriebskraft und die Reibungskraft von m_2 :

Berechnung der Bremsverzögerung:

$$a_2 = \frac{H_2 + R_2}{m_2} = \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha + f \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha}{m_2} = \frac{m_2 \cdot g \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{m_2} = g \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) = 6,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

m_2 beginnt die Bremsbewegung mit der Geschwindigkeit $v_2 = 1,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und gleitet dann bis zum

Halten. Die umgekehrte Bewegung ist dann eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus dem Haltepunkt heraus nach unten. Für sie gilt diese Gleichung:

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2} = \frac{1,26^2}{2 \cdot 6,73} \text{ m} = 0,12 \text{ m}$$

Ergebnis: m_2 gleitet also nur noch etwa 12 cm weiter und hält dann.

Dazu benötigt m_2 die Zeit t_2 :

$$v_2 = a_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{1,26}{6,73} \text{ s} = 0,18 \text{ s}$$

d)

Anschließend gleitet er wieder den Hang hinab so lange, bis die Schnur wieder gespannt ist. Dann gibt es einen Ruck und m_1 wird angehoben. Mit welcher Geschwindigkeit erreicht m_2 den Punkt, an dem m_2 wieder in Bewegung kommt?

Bei der Abwärtsbewegung wird die Hangabtriebskraft zur alleinigen Zugkraft, während nur die Reibung bremst: Beschleunigung:

$$a_3 = \frac{H_2 - R_2}{m_2} = \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha - f \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha}{m_2} = \frac{m_2 \cdot g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{m_2} = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung beginnt aus der Ruhe heraus, also gilt:

$$v_3 = \sqrt{2a_3s_2} = \sqrt{2 \cdot 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,12 \text{ m}} = 0,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dazu braucht m_2 die Zeit t_3 : $v_3 = a_3 \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v_3}{a_3} = \frac{0,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,27 \text{ s}$

e) Für das v-t-Diagramm machen wir eine Tabelle:

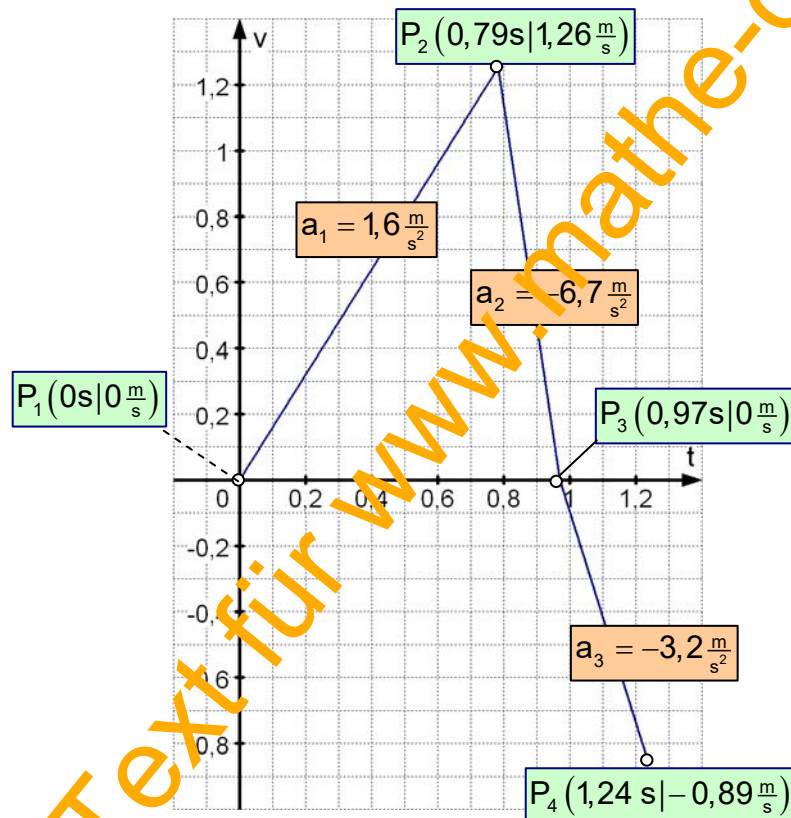
Zeit	0s	0,79 s	$0,79s+0,18s = 0,97s$	$0,97s+0,27s = 1,24s$
v	$0 \frac{m}{s}$	$1,26 \frac{m}{s}$	$0 \frac{m}{s}$	$-0,89 \frac{m}{s}$

Die Verbindungslinien im v-t-Diagramm sind Geraden bzw. Strecken.

Wegen $v = at$ gibt a die Steigungszahl an.

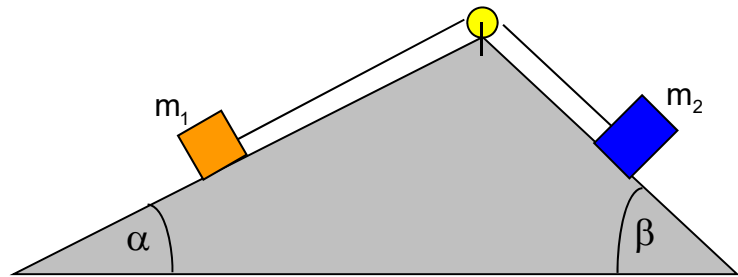
Die Bewegung nach links hat eine „positive Geschwindigkeit“, die nach rechts eine negative.

Wir übertragen nun einfach diese 4 Wertepaare als Punkte in ein v-t-Diagramm:



Beispiel 5

Nebenstehende Anordnung
hat die Winkel $\alpha = 30^\circ$
und $\beta = 45^\circ$.



- Zunächst nehmen wir an, dass die Bewegung reibungsfrei ausgeführt werden kann. Wir wollen errechnen, wie groß die Masse m_2 sein muss, damit die Anordnung eine Beschleunigung nach rechts erfahren kann.
- Nun lassen wir Gleitreibung mit $f = 0,25$ zu. Und es sei wieder $m_2 = k \cdot m_1$. Untersuche, für welche Werte von k sich die Anordnung nach links bzw. rechts in Bewegung setzt. Zeige ausführlich, warum für $k = 1$ keine Bewegung entstehen kann.
- Es sei $k = 2$. Berechne die Beschleunigung, gib die Bewegungsrichtung an.

Lösung:

- a) Wenn sich die Anordnung nach rechts bewegen soll, muss gelten: $H_2 > H_1$,

$$m_2 g \cdot \sin 45^\circ > m_1 \cdot g \cdot \sin 30^\circ \quad | : g$$

mit dem Ansatz $m_2 = k \cdot m_1$ folgt:

$$k m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} > m_1 \cdot \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

also

$$k \cdot \sqrt{2} > 1 \quad | : \sqrt{2}$$

$$k > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,707.$$

Ergebnis: Wenn die Masse $m_2 > 0,707 \cdot m_1$ ist, gleiten die Massen nach rechts.

Ist aber $m_2 < 0,707 \cdot m_1$, dann gleiten die Massen nach links.

- b) Bewegung mit Reibung nach rechts: Bedingung: $H_2 > H_1 + R_1 + R_2$

$$\text{d.h. } m_2 g \cdot \sin 45^\circ > m_1 g \cdot \sin 30^\circ + f \cdot m_1 g \cdot \cos 30^\circ + f \cdot m_2 g \cdot \cos 45^\circ \quad | : g$$

$$\text{d.h. } k m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} > m_1 \cdot \frac{1}{2} + 0,25 \cdot m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + 0,25 \cdot k m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad | : m_1$$

$$0,707 \cdot k > 0,5 + 0,217 + 0,177 \cdot k$$

$$0,53 \cdot k > 0,717 \cdot m_1 \quad \text{d.h. } k > \frac{0,717}{0,53} = 1,35$$

Ergebnis: Wenn $m_2 > 1,35 \cdot m_1$ ist, dann setzt sich die Anordnung nach rechts in Bewegung.

Bewegung mit Reibung nach links unter der Bedingung: $H_1 > H_2 + R_1 + R_2$

$$\text{d.h. } m_1 g \cdot \sin 30^\circ > m_2 g \cdot \sin 45^\circ + f \cdot m_1 g \cdot \cos 30^\circ + f \cdot m_2 g \cdot \cos 45^\circ \quad | : g$$

$$\text{Mit } m_2 = k \cdot m_1: m_1 \cdot \frac{1}{2} > k \cdot m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + 0,25 \cdot m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + 0,25 \cdot k \cdot m_1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad | : m_1$$

$$\frac{1}{2} > 0,707 \cdot k + 0,217 + 0,177 \cdot k$$

$$0,238 > 0,884 \cdot k \quad \text{d.h. } k < \frac{0,238}{0,884} = 0,32$$

Ergebnis: Wenn $m_2 < 0,28 \cdot m_1$ ist, dann setzt sich die Anordnung nach links in Bewegung.

Mit anderen Worten: Für alle Werte von k mit $0,32 \leq k \leq 1,35$ ist keine beschleunigende Kraft vorhanden, weil die bremsenden Kräfte in ihrer Summe größer sind als die Antriebskraft, die ja nur eine der beiden Hangabtriebskräfte sein kann.

Und nun der Fall $k = 1$, also $m_2 = m_1$.

Die Annahme, dass die Bewegung nach rechts erfolgt, ergibt diese Beschleunigungskraft:

$$F_{\text{rechts}} = H_2 - H_1 - R_1 - R_2 = m_2 g \cdot \sin 45^\circ - m_1 g \cdot \sin 30^\circ - f \cdot m_1 g \cdot \cos 30^\circ - f \cdot m_2 g \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_{\text{rechts}} = m_1 g \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = m_1 \cdot g \cdot (-0,186) < 0$$

Diese negative Kraft zeigt, dass die Beschleunigungskraft zu klein ist, so dass dieser Ansatz keinen Sinn macht.

Die Annahme, dass die Bewegung nach links erfolgt, ergibt diese Beschleunigungskraft:

$$F_{\text{links}} = m_1 g \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = m_1 \cdot g \cdot (-0,6) < 0$$

Diese negative Kraft zeigt, dass die Beschleunigungskraft zu klein ist, so dass dieser Ansatz keinen Sinn macht.

Ergebnis: Für $k = 1$, also $m_2 = m_1$ erhält man keine Bewegung.

c) Für $k = 2$ gilt $m_2 = 2 \cdot m_1$.

Berechnung der Beschleunigung:

$$a = \frac{H_2 - H_1 - R_1 - R_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin 45^\circ - m_1 \cdot g \cdot \sin 30^\circ - f \cdot m_1 g \cdot \cos 45^\circ - f \cdot m_2 g \cdot \cos 30^\circ}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{2m_1 \cdot g \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - m_1 \cdot g \cdot \frac{1}{2} - 0,25 \cdot m_1 g \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - 0,25 \cdot 2m_1 g \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}}{m_1 + 2m_1}$$

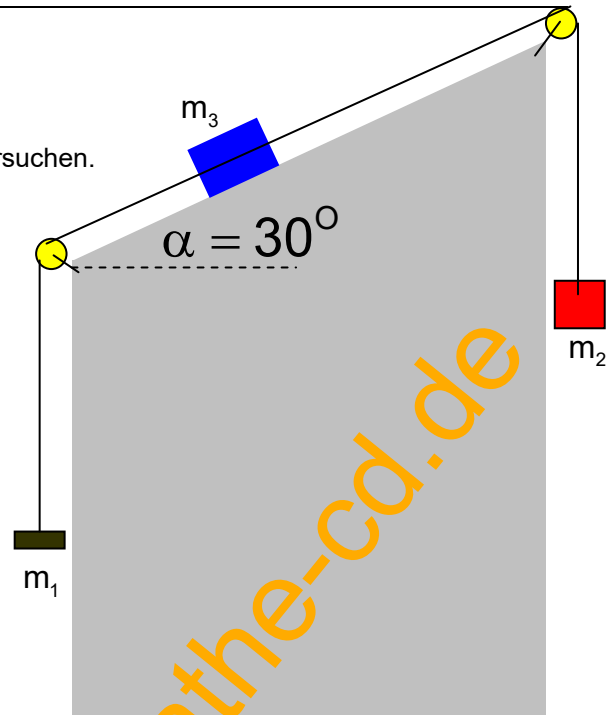
$$a = \frac{m_1 g \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - 0,25 \cdot \sqrt{3} \right)}{3m_1} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,304}{3} \approx 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Beispiel 6

In dieser Aufgabe wollen wir drei Konstellationen untersuchen.

Je nach Größe der Massen kann sich die Anordnung nach links oder nach rechts in Bewegung setzen. oder auch gar nicht.

Dabei wollen wir die Haftreibung ganz außer Acht lassen, jedoch berücksichtigen wir die Gleitreibung mit $f = 0,25$.

a) **Konstellation 1:**

Es sei $m_1 = m$, $m_3 = 4m$ und $m_2 = k \cdot m$.

Untersuche, für welches k eine Bewegung nach rechts entsteht.

Welches k folgt aus der Beschleunigung $a = 1,13 \frac{m}{s^2}$ bei der Rechtsbewegung?

b) Finde eine Zahl k , so dass die sich Anordnung nach links bewegt.

c) Gib ein k an, das zu keiner Bewegung führt. Was passiert bei $k = 2,13$ und $k = 3,87$?

Lösung:

a) Bedingung für die Bewegung nach rechts: $G_2 > H_3 + R_3 + G_1$

$$\text{d. h.} \quad k \cdot mg > 4mg \cdot \sin 30^\circ + f \cdot 4mg \cdot \cos 30^\circ + mg \quad | : mg$$

$$\text{ergibt} \quad k > 4 \cdot \frac{1}{2} + 0,25 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + 1 = 3,866$$

Nun sei $a = 1,13 \frac{m}{s^2}$ und die Anordnung fahre nach rechts. Dann gilt:

$$a = \frac{G_2 - H_3 - R_3 - G_1}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{k \cdot mg - 4mg \cdot \sin 30^\circ - f \cdot 4mg \cdot \cos 30^\circ - mg}{m + km + 4m}$$

$$a = \frac{(k - 4 \cdot \frac{1}{2} - 0,25 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - 1)mg}{(5+k)m} = \frac{(k - 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)g}{(5+k)}$$

$$(5+k)a = \left(\underbrace{k - 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1}_{-3,87} \right) g$$

Jetzt setzen wir $a = 1,13 \frac{m}{s^2}$ ein und lösen die Gleichung nach k auf:

$$5 \cdot 1,13 \frac{m}{s^2} + k \cdot 1,13 \frac{m}{s^2} = k \cdot 10 \frac{m}{s^2} - 38,7 \frac{m}{s^2} \quad | : \frac{m}{s^2}$$

$$5 \cdot 1,13 + 38,7 = k \cdot 10 - k \cdot 1,13$$

$$8,87 \cdot k = 44,35$$

Ergebnis: $k = 5$.

- b) Bei einer Bewegung nach links haben wir zwei Antriebskräfte:

G_1 und H_3 , während R_3 und G_2 bremsen. Es gilt die Bedingung:

$$G_1 + H_3 > R_3 + G_2$$

$$m_1 g + m_3 g \cdot \sin 30^\circ > f \cdot m_3 g \cdot \cos 30^\circ + m_2 g$$

$$mg + 4mg \cdot \frac{1}{2} > 0,25 \cdot 4mg \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + kmg \quad | : mg$$

$$1 + 2 > \frac{1}{2} \sqrt{3} + k$$

$$k < 3 - \frac{1}{2} \sqrt{3} = 2,13$$

Also bewegen sich beispielsweise die Körper nach links, wenn $k = 2$ ist.

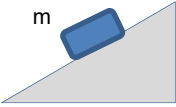
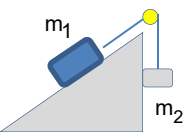
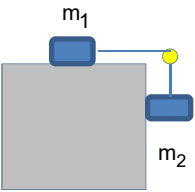
- c) Nach a) und b) bewegt sich die Anordnung gar nicht, wenn gilt: $2,13 < k < 3,266$,
also zum Beispiel für $k = 3$.

Für $k = 2,13$ haben wir nach links Kräftegleichgewicht, und für $k = 3,266$ nach rechts.

Das bedeutet, dass die Körper ihren Bewegungszustand nicht ändern.

Sind sie in Ruhe, bleiben sie es, erhalten sie einen Anstoß, so dass die Haftreibungskraft überwunden wird, dann bewegen sie sich anschließend mit der so erreichten Geschwindigkeit gleichförmig weiter. !

5 Übersicht

Situation	Bewegung	Zugkraft	Bremskraft	Beschlg.	Bremsverz.	Seilkraft
	Abwärts	$H = mg \cdot \sin \alpha$	$R = fmg \cdot \cos \alpha$	$\frac{H - R}{m}$	$\frac{R - H}{m}$	keine
	Aufwärts	Keine	H und F_r	Unmöglich	$\frac{H + R}{m}$	keine
	Nach links	$H_1 = m_1 g \cdot \sin \alpha$	R_1 und G_1	$\frac{H_1 - R_1 - G_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{R_1 + G_2 - H_1}{m_1 + m_2}$	$m_2 a$
	Nach rechts	$G_2 = m \cdot g$	R_1 und H_1	$\frac{G_2 - H_1 - R_1}{m_1 + m_2}$	$\frac{H_1 + R_1 - G_2}{m_1 + m_2}$	$G_2 - m_2 a$
	Nach rechts	$G_2 = m \cdot g$	R_1	$\frac{G_2 - R_1}{m_1 + m_2}$	$\frac{R_1 - G_2}{m_1 + m_2}$	$G_2 - m_2 a$
	Nach links	Keine	R_1 und G_2	Unmöglich	$\frac{R_1 + G_2}{m_1 + m_2}$	$G_2 + m_2 a$

Die Bewegung kann jeweils in beiden Richtungen laufen, wenn das System angestoßen wird.

Die Kräfte können dann beschleunigend oder bremsend wirken.

6. Aufgaben mit Kurzlösungen bzw. Ergebnissen

Aufgabe 1

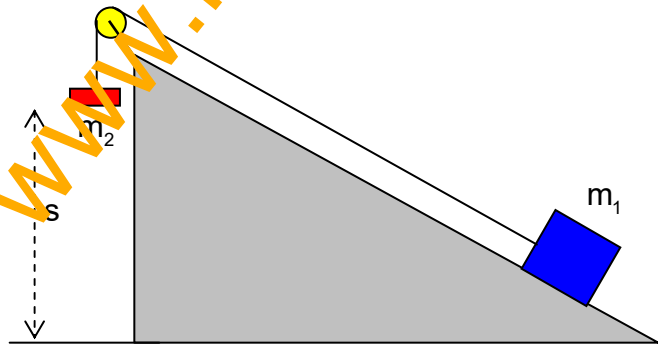
Gegeben seien $m_1 = 1 \text{ kg}$,
 $m_2 = 300 \text{ g}$, $f = 0,3$ und $f' = 0,4$.



- Setzt sich das gekoppelte System von selbst in Bewegung?
- Das System setze sich mit $v_0 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in Bewegung.
 Ermittle, ob die Bewegung gleichförmig oder gleichmäßig beschleunigt oder gar gebremst ist.
 Nach welcher Zeit hat m_1 die Strecke $s_1 = 40 \text{ cm}$ zurückgelegt?
- Die Höhe h sei 50 cm . Wie weit könnte sich dann m_1 noch bewegen, wenn m_2 aufgesetzt hat und m_1 noch hinreichend viel Platz zum Gleiten hat?

Aufgabe 2

Eine schiefe Ebene hat den Neigungswinkel
 $\alpha = 30^\circ$. Beide Massen haben 600 g und
 werden festgehalten.



- Zeige, dass sie sich nach dem Loslassen in Bewegung setzen.
 In welche Richtung?
- Mit welcher Beschleunigung setzen sie sich in Bewegung? Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 auf dem Boden auf, wenn $s = 80 \text{ cm}$ beträgt?

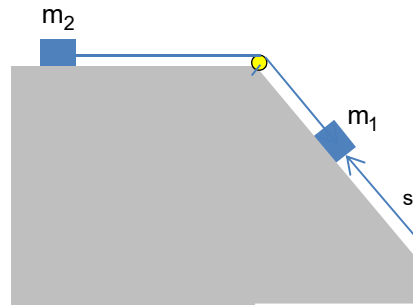
Aufgabe 3 (bezieht sich auch auf Abbildung von Aufgabe 2)

Gegeben sind $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1,5 \text{ kg}$, Haftreibungszahl $f' = 0,3$, Gleitreibungszahl $f = 0,2$.

- Zeige, dass sich das System von selbst in Bewegung setzt.
 Mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 nach $s = 1,3 \text{ m}$ auf?
 Wie weit gleitet dann m_1 noch aufwärts?
- Wenn dort m_1 anhält, bleibt m_1 in Ruhe oder kann sie von selbst wieder abwärts gleiten?
- Mit welcher Geschwindigkeit erreicht es die Stelle, an der m_2 wieder abhebt?
 Mit welcher Bremsverzögerung bewegt sich dann das System weiter?

Aufgabe 4

Gegeben. $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, $f = 0,2$ und $f' = 0,4$.
und Neigungswinkel 60° .

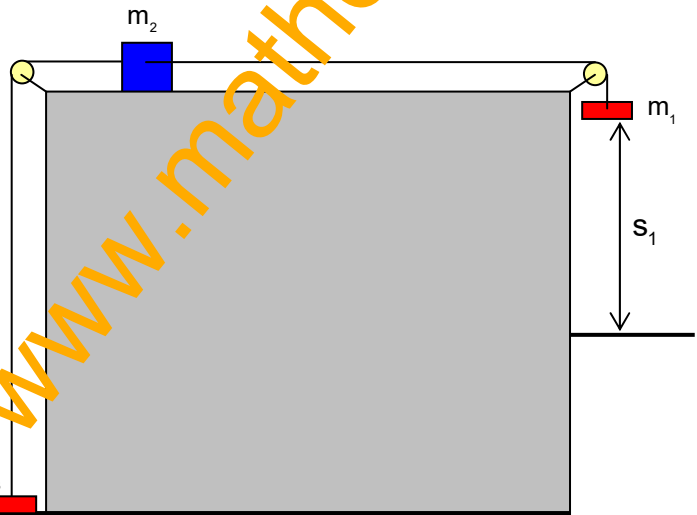


- Wie groß darf m_2 höchstens sein, wenn sich die Körper in Bewegung setzen sollen?
- Berechne die Beschleunigung für $m_2 = m_1$.
Mit welcher Geschwindigkeit prallt m_1 unten auf, wenn $s = 71 \text{ cm}$ ist?
Wie weit könnte dann m_2 noch gleiten (vorausgesetzt der Weg reicht aus)?
- Berechne die Seilkraft für den Fall, dass beide Massen in Bewegung sind.

Aufgabe 5

Gegeben sind $m_1 = 200 \text{ g}$,
 $m_2 = 200 \text{ g}$, $m_3 = 100 \text{ g}$.
 $s_1 = 0,50 \text{ m}$ und $f = 0,4$.

Die Anordnung setzt sich nach rechts in Bewegung.

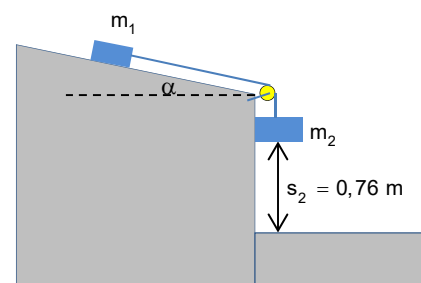


- Berechne die Beschleunigung.
Mit welcher Geschwindigkeit v_1 setzt m_1 auf?
Wie lange ist m_1 in Bewegung?
- Wie weit ($s_2 = ?$) bewegen sich m_2 und m_3 noch, nachdem m_1 aufgesetzt hat?
- Danach bewegen sich m_1 und m_2 wieder in die andere Richtung. Welche Beschleunigung wirkt dabei?
- Berechne alle Seilkräfte, solange sich m_1 noch bewegt.

Aufgabe 6

Gegeben: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 0,2 \text{ kg}$, $f = 0,3$. $\alpha = 10^\circ$

- Das System setzt sich aus der Ruhe heraus in Bewegung.
wann und mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 auf?
- Wie schnell und wo ist m_1 nach $0,2 \text{ s}$?
Wie weit könnte dann m_1 noch gleiten?
- Welche Neigung muss die schiefe Ebene haben, damit m_1 nach dem Aufsetzen von m_2 gleichförmig gleitet? Berechne dazu die Geschwindigkeit.



Kurzlösung zu Aufgabe 1:

- a) Die Zugkraft ist $G_2 = 3 \text{ N}$ und somit kleiner als die Haftreibungskraft $R' = f' \cdot m_2 \cdot g = 4 \text{ N}$:
Also setzt sich das System nicht von selbst in Bewegung.
- b) Überwindet man die Haftreibung durch einen leichten Stoß, dann wird die Gleitreibungskraft $F = f \cdot m_2 \cdot g = 3 \text{ N}$. Da diese gleich groß ist wie G_2 führt das System dann eine gleichförmige Bewegung aus mit $v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = \frac{s}{v} = \frac{0,4 \text{ m}}{0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2 \text{ s}$
- c) Nach 50 cm ist v immer noch $0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (gleichförmige Bewegung).
Ab da gleitet m_1 alleine und wird mit $a = \frac{R}{m} = f \cdot g = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gebremst.
Damit gleitet m_1 noch $v = \sqrt{2as} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = 0,007 \text{ m} = 7 \text{ mm}$ weit.

Kurzlösung zu Aufgabe 2:

- a) In Ruhe ist die Zugkraft $G_2 = 6 \text{ N}$ und die Bremskraft $H_1 + R_1' = 3 \text{ N} + 2,1 \text{ N}$.
Also setzt sich die Anordnung nach rechts in Bewegung.
- b) Die Beschleunigungskraft ist $F = G_2 - H_1 - R_1 = 2 \text{ N}$ und erzeugt $a = \frac{F}{m} = 1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Für $s = 80 \text{ cm}$ ist die Fahrzeit $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0,98 \text{ s}$
und $v = \sqrt{2as}$ oder $v = a \cdot t = 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Kurzlösung zu Aufgabe 3:

- a) In Ruhe ist die Zugkraft $G_2 = 15 \text{ N}$ und die Bremskraft $H_1 + R_1' = 6,4 \text{ N} + 2,3 \text{ N} = 8,7 \text{ N} < G_2$
Also setzt sie die Anordnung nach links in Bewegung und zwar mit $a = \frac{G_2 - H_1 - R_1}{m_1 + m_2} = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Nach 1,3 m ist $v = \sqrt{2as} = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dann wird nur noch mit $b = \frac{H_1 + R_1}{m_1} = 7,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gebremst.
 m_1 legt dann bis zum Halten noch $s = \frac{v^2}{2b} = 0,46 \text{ m}$ zurück (Umgekehrte Bewegung).
- b) Im Haltepunkt ist die Zugkraft $H_1 = 6,4 \text{ N}$ und die Haftreibungskraft $R_1' = 2,3 \text{ N}$.
Also gleitet m_1 sofort wieder nach unten mit der Beschleunigung $c = \frac{H_1 - R_1}{m_1} = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- c) und hat nach 0,46 m $v = \sqrt{2cs} = 2,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht.
Dann ist die Beschleunigung kleiner, weil G_2 auch bremst: $a^* = \frac{H_1 - R_1 - G_2}{m_1 + m_2} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Ein negativer Wert bedeutet, dass die Bewegung abgebremst wird.

Kurzlösung zu Aufgabe 4

- a) Bedingung für den Start: $H_1 > R_1' + R_2'$ d. h. $m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha > f' \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha + f' \cdot m_2 \cdot g$ $|\ :g$
 $f' \cdot m_2 < m_1 \cdot \sin \alpha - f' \cdot m_1 \cdot \cos \alpha$

$$m_2 < \frac{\sin \alpha - f' \cdot \cos \alpha}{f'} \cdot m_1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0,4 \cdot \frac{1}{2}}{0,4} \cdot 0,5 \text{ kg} = 0,833 \text{ kg}$$

- b) Beschleunigung: $a = \frac{H_1 - R_1 - R_2}{m_1 + m_2} = \frac{mg \cdot \sin \alpha - fmg \cdot \cos \alpha - fmg}{2m} = \frac{1}{2}(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha - f)g$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0,2 \cdot \frac{1}{2} - 0,2 \right) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{mit } m = m_1 = m_2$$

Bewegung aus der Ruhe heraus: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 2,83 \cdot 0,71} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Restbewegung von m_2 bis zum Halten. Bremsverzögerung = Reibungskraft:

$$a_2 = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Umgekehrte Bewegung: $v = \sqrt{as} \Rightarrow s = \frac{v^2}{a} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \text{ m}$

- c) Verteilung der Hangabtriebskraft: Sie beschleunigt beide Massen und überwindet die Reibung bei beiden Massen. Das Seil überträgt den Anteil für m_2 , also

$$H_1 = \underbrace{m_1 a + m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot f}_{\text{Anteil für } m_1} + \underbrace{m_2 g \cdot f + m_2 g \cdot a}_{\text{Anteil für } m_2}$$

Seilkraft: $F_S = m_2 g \cdot f + m_2 \cdot a = 5 \text{ N} \cdot 0,2 + 0,5 \text{ kg} \cdot 2,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,41 \text{ N}$

(Zum Vergleich: Die gesamte Hangabtriebskraft ist $H_1 = 5 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ = 4,33 \text{ N}$)

Kurzlösung zu Aufgabe 5

a) $a = \frac{G_1 - R_2 - G_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \text{ N} - 2 \text{ N} \cdot 0,4 - 1 \text{ N}}{0,5 \text{ kg}} = \frac{0,2}{0,5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0,4 \cdot 0,71} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,63 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{0,63}{0,4} \text{ s} = 1,575 \text{ s}$$

- b) Bremsverzögerung: $b = \frac{R_2 + G_3}{m_2 + m_3} = \frac{1,8 \text{ N}}{0,3 \text{ kg}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$: Bewegung bis zum Halten mit umgekehrter

Bewegung berechnen: $v = \sqrt{2bs} \Rightarrow s_2 = \frac{v^2}{2b} = \frac{0,4}{12} \text{ m} = 0,033 \text{ m}$

c) Neue Beschleunigung: $c = \frac{G_3 - R_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \text{ N} - 0,4 \cdot 2 \text{ N}}{0,3 \text{ kg}} = \frac{0,2}{0,3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- d) Das Seil zwischen m_1 und m_2 überträgt den Rest der Gewichtskraft G_1 zur beschleunigenden Kraft $m_1 a$, also $F_{S1,2} = G_1 - m_1 a = 2 \text{ N} - 0,2 \text{ kg} \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \text{ N} - 0,08 \text{ N} = 1,92 \text{ N}$

Das Seil zwischen m_2 und m_3 muss noch die Kraft übertragen, die m_3 zur Beschleunigung braucht und zum Kompensieren des Gewichts von m_3 .

$$F_{S2,3} = m_3 \cdot a + G_3 = 0,1 \text{ kg} \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1 \text{ N} = 1,04 \text{ N}$$

Kurzlösung zu Aufgabe 6

- a) Beschleunigung am Start:

$$a = \frac{G_2 + H_1 - R_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g + m_1 g \cdot \sin \alpha - f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha}{m_1 + m_2} = \frac{2 \text{ N} + 10 \text{ N} \cdot \sin(10^\circ) - 0,3 \cdot 19 \text{ N} \cdot \cos(10^\circ)}{1,2 \text{ kg}} = 0,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Endgeschwindigkeit: } v_2 = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0,66 \cdot 0,76} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } v = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{a} \approx 1 \text{ s}$$

- b)
- Bewegung von m_1 bis zum Halten .**

$$\text{Beschleunigung: } b = \frac{H_1 - R_1}{m_1} = \frac{mg \cdot \sin \alpha - f \cdot mg \cdot \cos \alpha}{m_1} = (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot g \approx -1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Eine negative Beschleunigung ist eine Bremsverzögerung.

$$\text{Nach } 0,2 \text{ s: } v(0,2 \text{ s}) = v_2 - |b| \cdot 0,2 = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ s} = 0,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{und } s(0,2) = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,04 \text{ s}^2 = 0,18 \text{ m}.$$

Restweg von m_1 ab dem Aufsetzen von m_2 (umgekehrte Bewegung aus dem Halten heraus):

$$v = \sqrt{2bs} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2b} = \frac{1,0^2}{2 \cdot 1,2} \approx 0,42 \text{ m}$$

$$\text{Dazu braucht } m_1 \text{ } v = b \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{b} = \frac{1}{1,2} \text{ s} \approx 0,83 \text{ s}$$

- c) Für eine gleichförmige Bewegung muss nach dem Aufsetzen von B die Antriebskraft 0 sein.
Dies ist dann der Fall, wenn $H = R_1$ ist:

$$m_1 g \cdot \sin \alpha = f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = f = 0,3 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} 0,3 \approx 16,7^\circ.$$